

Text ist noch nicht fertig

Kurven zeichnen
mit

MatheGrafix 7

Anleitungen und eigene Erfahrungen

Kurvenscharen
Dreiecke, Vierecke, Kreise, Tangenten,

Experimentelle Kurvenuntersuchungen mit einer Tracefunktion
Schnittpunkte, Extrempunkte näherungsweise ermitteln

Datei Nummer: 41000

Friedrich Buckel

Stand: 17. September 2008

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

MatheGrafix Pro ist ein Spitzenprogramm zur Erstellung von Schaubildern
Es enthält so viele Optionen, dass man sich die Mühe machen sollte, etwas an Hand dieser Anleitung
das Programm mit all seinen Fähigkeiten zu testen.

Ich gebe hier meine Erfahrungen weiter. Der Text wird demnächst wieder erweitert.

Ich danke Herrn Hammes für seine Mühe um dieses tolle Programm und auch für seine Bereitschaft,
meine Anregungen und Bitten weitgehend umzusetzen. Ich erkenne durch meine Arbeit an der
Mathe-CD, welche Bedürfnisse entstehen. Und viele davon sind jetzt realisierbar.

Übrigens: Das Programm wird ständig weiter entwickelt und wird noch viele Überraschungen bringen.

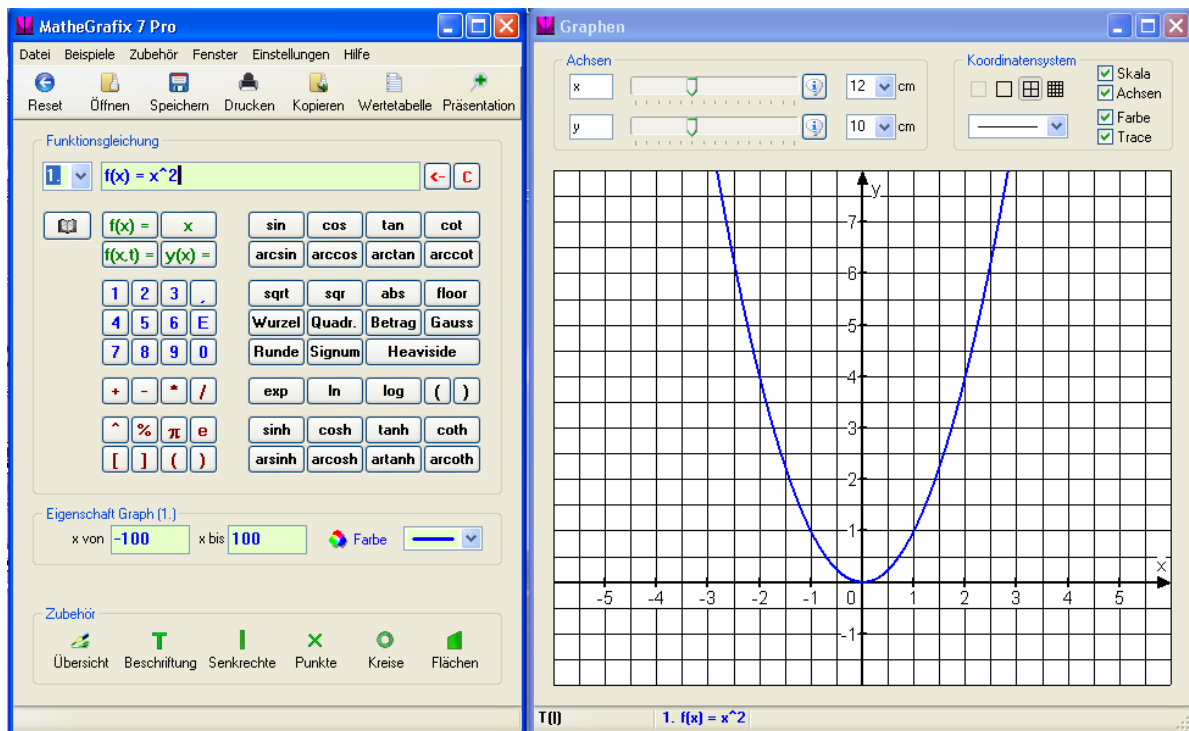
In der **Sharewareversion** sind nur einige Optionen freigeschaltet.

Die 15 Euro für die Registrierung zur Freischaltung des vollen Programms sind gut angelegt!

Ich wünsche Ihnen ebenso viel Freude mit MatheGrafix, wie ich sie bei seiner Benutzung habe.

Friedrich Buckel

1. Übersicht und Beispiel.




Wenn man MatheGrafix 7 Pro öffnet, erscheint diese Arbeitsoberfläche auf dem Bildschirm.

Sie besteht aus zwei Teilen, die man getrennt verschieben kann und am oberen Rand doppelt anklicken kann. Testen Sie dies einmal.

In der ersten Menüleiste gibt es eine Reihe von Menüpunkten, die man öffnen kann und die man einfach ausprobieren sollte. Als Beispiel öffnen Sie bitte unter Hilfe den Menüpunkt „Hotkeys“.

Hier finden Sie ganz nützliche Tastenkürzel, die ein schnelles Arbeiten ermöglichen.

Auch lohnen sich zum ersten Testen die vorgefertigten Beispiele. Diese finden Sie erstens als Vorlagen unter , dort können Sie gewisse Funktionen einfach ändern- Oder unter „Beispiele in der Menüleiste“. Achten Sie dabei darauf, dass manche Grafiken aus mehreren überlagerten Schaubildern bestehen, etwa das

[Beispiel mit dem Rotationskörper um die y-Achse.](#) Rufen Sie es jetzt bitte auf.

Man erkennt an der Fußzeile, dass (mindestens) 3 Funktionen beteiligt sind. Diese kann man doppelt anklicken, dann wird ihre Funktionsgleichung links oben angezeigt. Mit den Hotkeys Strg+F1 bis Strg+F7 (es geht bis F9) kann man die Funktionen der Reihe nach aufrufen. Schalten Sie dazu den Trace-Modus ein (Häkchen oben rechts), dann können Sie mit der Maus ein kleines Quadrat auf der angezeigten Kurve bewegen und erkennen sofort, welche Kurve zu welcher Gleichung gehört. Und dann klicken Sie mal mit der rechten Maustaste: Sie haben einen Punkt fotografiert und seine Koordinaten festgehalten.

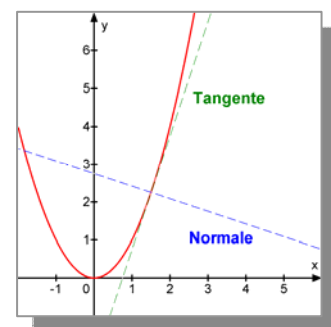
Wenn Sie jetzt die Abbildung kopieren wollen, geht das mit F5. Und schon können Sie es beispielsweise in WORD einfügen.

Wir spielen noch ein wenig mit dieser Darstellung:

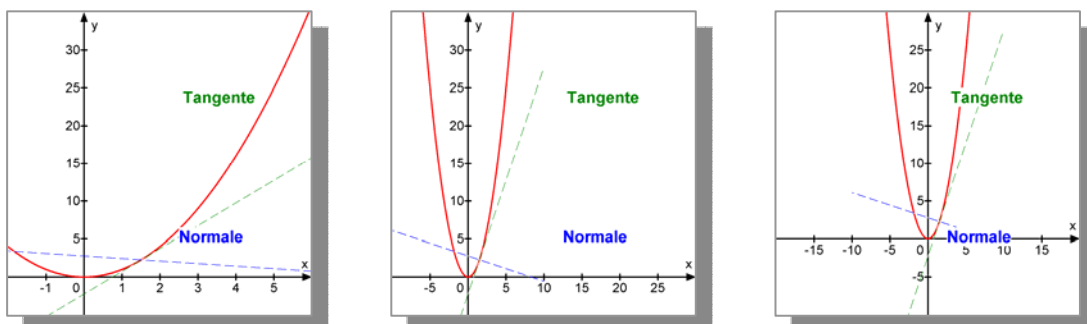
- (1) Klicken Sie bitte mit der rechten Maustaste auf das Schaubild. Damit bewegen Sie den Ursprung des Koordinatensystems dahin, wo Sie ihn haben wollen.
2. Oben rechts steht Koordinatensystem. Dort lässt sich ein Koordinatengitter ein- und wieder ausblenden. Darunter lässt sich die Strichart des Gitters festlegen. Ferner können Sie die Skala, die Achsen und die Farbe ausblenden.
3. Oftmals passt ein Diagramm nicht auf das eingestellte Fenster. Dann gibt es verschiedene Möglichkeiten, dies zu verändern. Öffnen Sie bitte dazu das Beispiel: Geraden – Tangente und Normale.

Ich habe das Bild hierher kopiert, es mit einem grauen Rahmen und einem Schatten versehen.

Nun bewege ich den Zeiger für die y-Einstellung nach rechts, was den Maßstab auf der y-Achse ändert, und erhalte die nächste Abbildung.



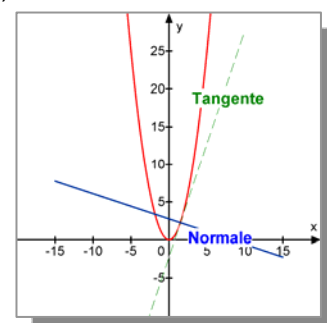
Dann habe ich den x-Maßstab verändert und die y-Achse nach rechts gerückt.



Jetzt möchte ich die Normale verlängern. Dazu lese ich an der Statuszeile ab, dass sie (wegen ihrer negativen Steigung zur Gleichung 3 gehört. (Testen Sie jetzt bitte einmal die Tastenkombination Strg+T. Dann öffnet sich eine Tabelle, in der sie die dargestellten Funktionen sehen können. Diese Tabelle bekommen Sie auch über das Icon „Übersicht“ links unten.)

Jetzt aktivieren Sie mit Strg+F3 die Normalenfunktion. Dann können Sie die Eigenschaften des Graphen so verändern, dass Sie x (das von -10 bis 10 ein gestellt war) von -15 bis 15 einstellen. Sie können ferner die Farbe und die Strichart verändern.

Nun wollen wir selbst Funktionen eingeben.



2. Einfache Kurven darstellen

Beispiel 1

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x - 2$$

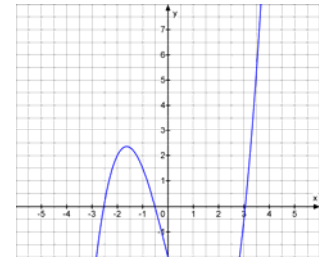
1. Schritt: Löschen Sie die eingegebene Funktion, z. B. indem Sie auf C klicken.

2. Schritt: Klicken Sie auf f(x)= und geben Sie dahinter den Funktionsterm ein.

Dazu muss man sich an die Syntax halten. Diese verlangt, dass man den „Malpunkt“ als * eingibt. Sie sollten also diese Eingabe vornehmen: $x^3/2 - 4 * x - 2$

Jetzt sehen Sie das dargestellte Bild.

Damit kann man nicht zufrieden sein. Wir verbessern es:

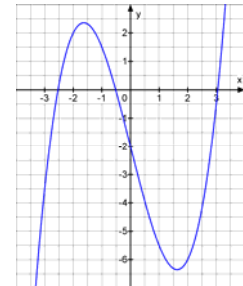
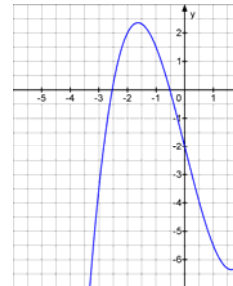


3. Schritt: Verschieben des Ursprung:

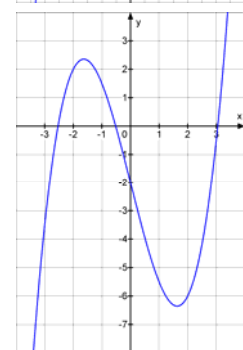
Klicken Sie mit der Maus den Ursprung an und verschieben ihn so weit nach oben, dass die „Welle“ ganz im Fenster liegt.

4. Schritt: x-Achse verkürzen:

Wir zählen ab: Sie kann um 4 cm kürzer werden. Also klicken wir ganz oben den Pfeil hinter 12 cm an und stellen 8 cm ein. Doch nun müssen wir den Ursprung nochmals durch Anklicken nach links ziehen.

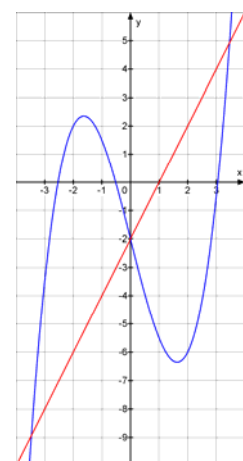


5. Schritt: Wenn Sie jetzt oben und unten mehr von der Kurve sehen wollen, können Sie die y-Achse verlängern, etwa auf 12 cm. Dann verschieben wir den Ursprung wieder etwas nach oben. Jetzt möchte ich aber das Gitter nur im 1 cm-Raster haben. Dazu klicke ich ganz oben unter „Koordinatensystem“ das nicht unterteilte kleine Quadrat an.



Als nächstes kommt eine Gerade dazu ins Bild: $y = 2x - 2$.

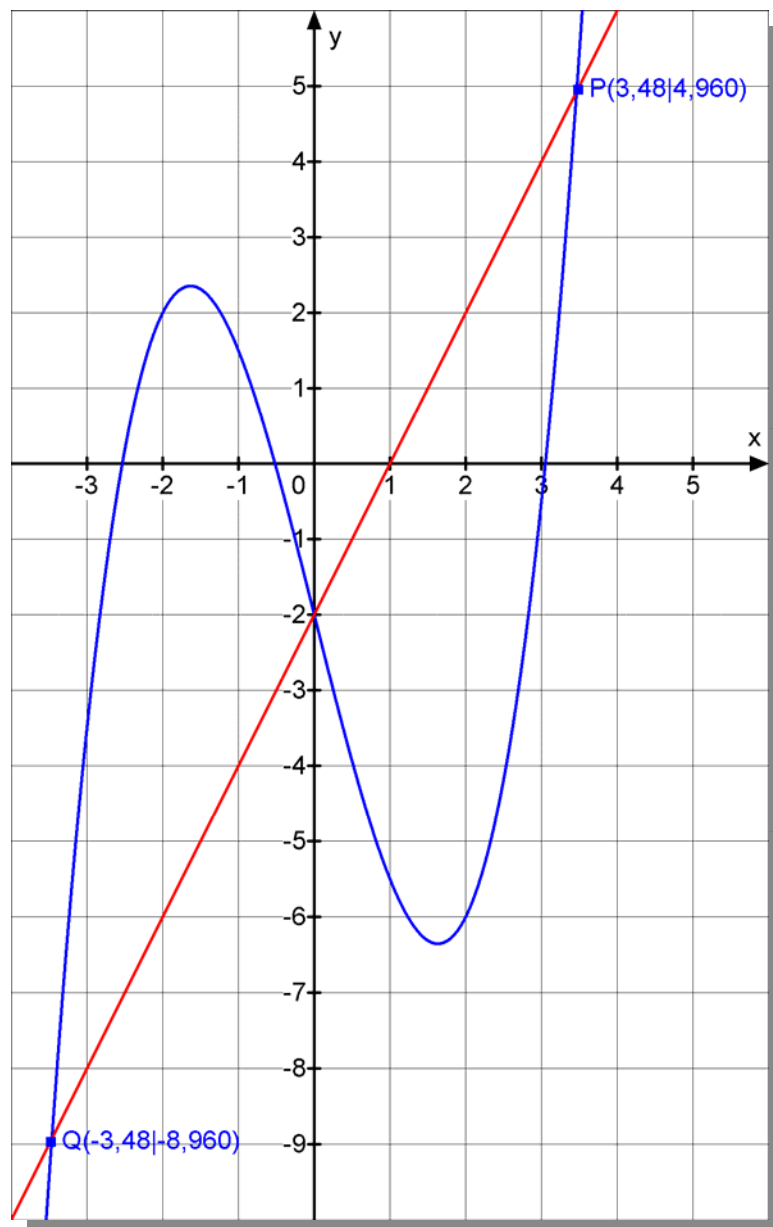
6. Schritt: Klicken Sie auf eine leere Fläche von Mathegrafix und geben dann Strg F2 ein. Dann wird das nächste Eingabefenster geöffnet. Geben Sie ein: $2 * x - 2$. Dann sehen Sie die Gerade. Anschließend verlängern Sie bitte die y-Achse auf 16 cm und verschieben den Ursprung in die Mitte. Rechts sehen Sie mein Ergebnis.



7. Schritt: Wir ermitteln experimentell die Koordinaten der beiden Schnittpunkte. Dazu aktivieren Sie rechts oben die Trace-Funktion. Fahren Sie nun mit dem Mauscursor quer über die Abbildung.

Dabei sollte sich ein kleines Quadrat (der Trace-Cursor) entlang der Geraden bewegen. Haben Sie im Eingabefenster links die 1. Funktion aktiviert, dann bewegt er sich entlang der Kurve. Stoppen Sie nun vorsichtig beim Schnittpunkt rechts oben und betätigen dann die rechte Maustaste, dann wird der von Ihnen getroffene Punkt „fotografiert“ und als Punkt eingetragen. Dasselbe machen Sie links unten. Damit die eingetragene Beschriftung rechts oben ganz aufs Bild passt, vergrößern wir die x-Achse auf 10 cm. So sollte das Ergebnis aussehen:

Dies ist die Originalgröße.



Um dieses Bild nach Word zu übertragen klicken Sie Mathegrafix an einer leeren Stelle an und betätigen dann F5. Dann können Sie die Grafik in Word einfügen (Strg V). Man kann es dann dort mit einem Schatten versehen. Das geht so: Klicken Sie auf eine freie Stelle oben im Word-Menü und klicken Sie dann auf Anpassen. Dann auf Symbolleiste. Aktivieren Sie das Menü Zeichnen.

Jetzt sind die Koordinaten auf 4 Stellen genau eingestellt.


Die Rechnung liefert übrigens diese

Koordinaten:

$$A(2\sqrt{3} \mid 4\sqrt{3} - 2) \approx (3,46 \mid 4,93)$$

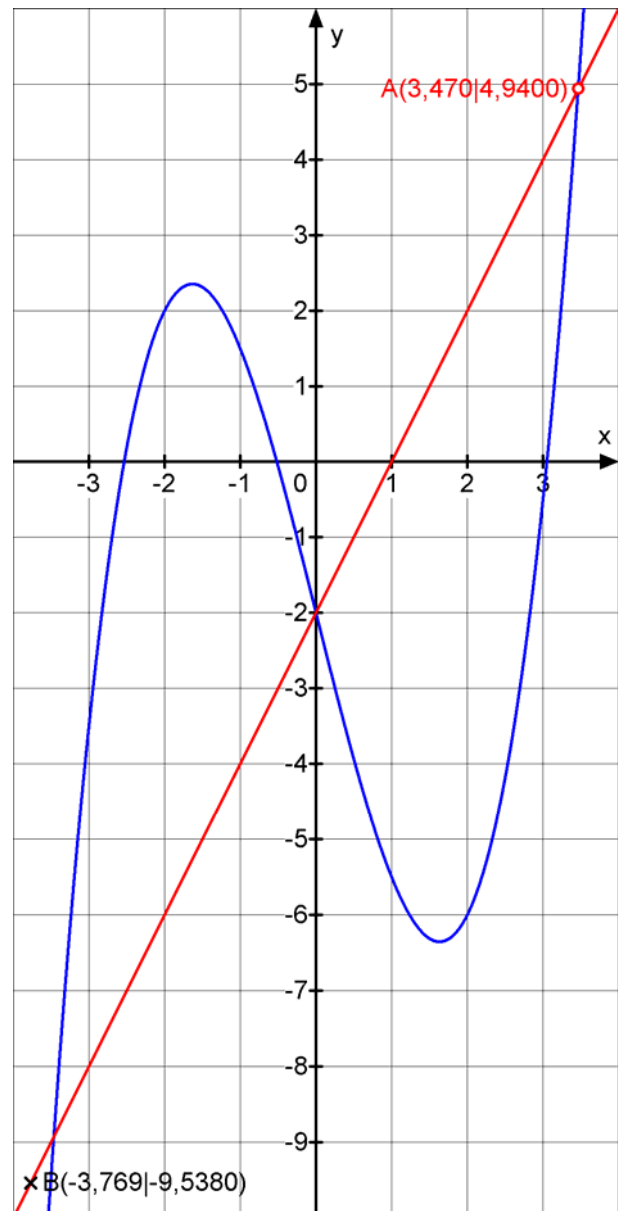
Das habe ich gut getroffen!

Zum Schluss öffnen Sie noch das Fenster

„Übersicht“, links unten mit .

Dort sehen Sie, welche Kurven dargestellt sind.

Sie können dort auch Farbwechsel vornehmen.



Beispiel 2

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{3x - 2}$$

$$\begin{array}{r} (x^2 + 0x - 4) : (3x - 2) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} \\ -(x^2 - \frac{2}{3}x) \\ \hline \frac{2}{3}x - 4 \\ -(\frac{2}{3}x - \frac{4}{9}) \\ \hline \frac{40}{9} \end{array}$$

Ich zerlege zuerst den Funktionsterm durch Polynomdivision:

$$\text{Also gilt: } f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} + \frac{\frac{40}{9}}{3x - 2} = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} + \frac{40}{9(3x - 2)}$$

Für $|x| \rightarrow \infty$ hat der Bruch den Grenzwert 0, also ist

für große $|x|$ $f(x) \approx \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$, was nichts anderes bedeutet, als dass die Gerade $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$

schräge Asymptote an das Schaubild K von f ist.

Ich gebe als Funktion 1 diesen Term ein: $(x^2 - 4) / (3 * x - 2)$. Wenn Sie den Malpunkt im Nenner vergessen, erhalten Sie keine Anzeige.

Dann aktiviere ich mit Strg F2 die Eingabezeile für die Asymptote und gebe ein: $x / 3 + 2 / 9$.

Jetzt kommt ein Trick: Ich gebe als 3. Funktion das ein, was ich über die Polynomdivision erhalten habe. Warum? Wenn ich eine andere Kurve erhalte, dann habe ich mir einen Rechenfehler geleistet! Ich gebe also ein: Strg F3 und dann $x / 3 + 2 / 9 + 40 / (9 * x - 6)$.

Hier meine Darstellung:

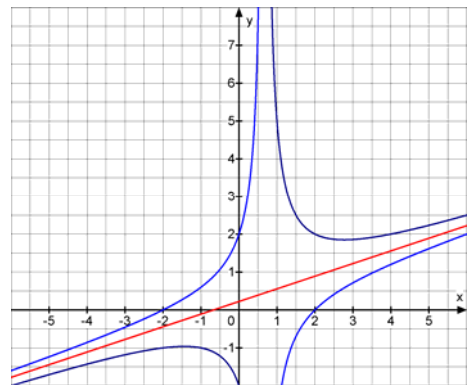
Der Ast oben rechts gehört zur 3. Eingabe!

Eigentlich sollte er sich mit der ersten Eingabe überlagern.

Ich erkenne also, dass mir ein Rechenfehler unterlaufen

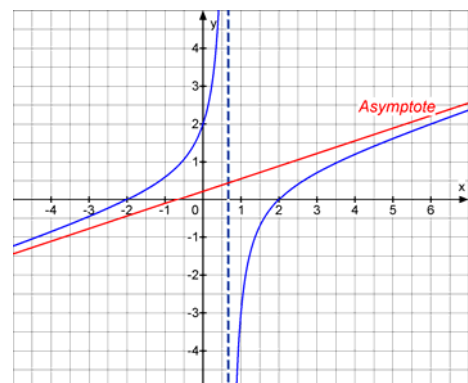
ist. Mein Cas-Rechner TI Nspire liefert:

$$\text{propFrac}\left(\frac{x^2 - 4}{3x - 2}\right) = \frac{-32}{9 \cdot (3x - 2)} + \frac{x}{3} + \frac{2}{9}$$




Die korrekte Division lautet:


$$\begin{array}{r} (x^2 + 0x - 4) : (3x - 2) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} \\ -(x^2 - \frac{2}{3}x) \\ \hline \frac{2}{3}x - 4 \\ -(\frac{2}{3}x - \frac{4}{9}) \\ \hline -\frac{32}{9} \end{array}$$



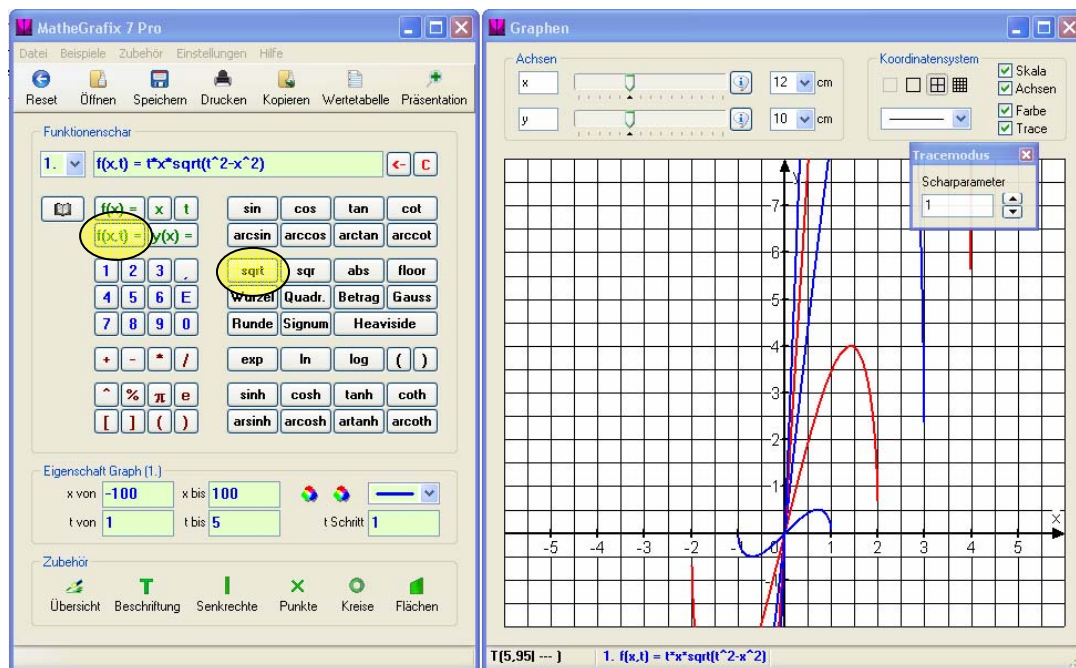
$$\text{Also: } f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} - \frac{\frac{32}{9}}{3x - 2} = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9} - \frac{32}{9(3x - 2)}$$

Jetzt ist die Doppelbelegung erreicht. Ich lösche f3 wieder. Dafür zeichne ich die senkrechte Asymptote $x = \frac{2}{3}$ ein. Dazu öffnet man das Menü „Senkrechte“ und gibt 1. $x = 0,667$ ein, wählt eine Farbe und gestrichelte Darstellung. Ich habe auch noch das Menü „Text“ geöffnet, dort das Wort Asymptote eingetippt und dieses durch Anklicken der Dreiecks-Zeichen an die gewünschte Stelle navigiert, Farbe und Kursiv wurden bei  eingestellt.

Beispiel 3 Eine Funktionenschar: $f_t(x) = tx \cdot \sqrt{t^2 - x^2}$

Löschen Sie zuerst MatheGrafix durch Reset  und bereiten Sie dann die Eingabezeile auf eine Funktionenschar vor. Wenn nämlich $f(x)=$ dasteht, wird keine angenommen.

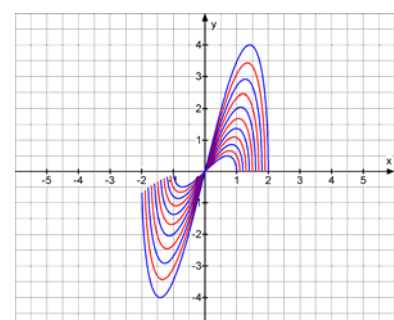
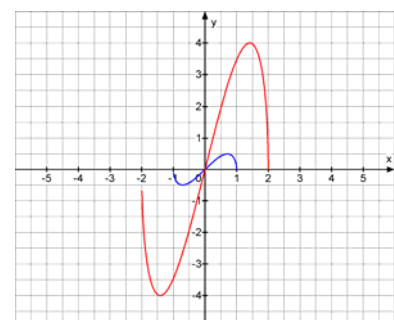
Klicken Sie auf $f(x,t)=$ und geben Sie dann ein $t * x * \text{sqrt}(t^2 - x^2)$. „sqrt“ (Square root) ist $\sqrt{\quad}$ und kann durch Anklicken eingefügt werden.



Rechts oben wird ein kleines Fenster „Tracemodus“ angezeigt, darin steht Scharparameter 1. Das bedeutet, dass der Tracecursor der Kurve für $t = 1$ entlang gleitet.

Nun zur Kurvenschar, die sieht ziemlich erbärmlich aus, muss also bearbeitet werden. Zuerst wähle ich einen anderer Parameterbereich und gebe ein: t von 1 bis 2. Jetzt erkenne ich nur noch 2 Kurven (Abb. rechts). Die Anzeige sagt uns nämlich t hat die Schrittweite 1.

Dies ändern wir in die Schrittweite 0,1. Ferner gehen wir auf t von 0 bis 2,6, verlängern die y -Achse auf 20, zentrieren das Koordinatensystem und blenden das Koordinatensystem aus. Die x -Achse verkürze ich auf 8 cm, zentriere erneut und erhalte die auf der nächsten Seite stehende Abbildung, die ich mit F5 kopiere und in Wort einfüge. Hier habe ich die Abbildung gestaucht (die Höhe auf 10 cm verkürzt), einen grauen Rahmen aus dem Zeichnen-Menü herumgelegt und den Schatten eingefügt.



Das ist die zu $f_t(x) = tx \cdot \sqrt{t^2 - x^2}$ gehörende Kurvenschar.

Die Abbildung kann man ergänzen durch eine zweite Schar mit der Gleichung $g_t(x) = -tx \cdot \sqrt{t^2 - x^2}$

Dazu markiere ich den Funktionsterm von f_t in MatheGrafix und kopiere ihn in die 2. Eingabezeile, die ich mit Strg F2 öffne, dann klicke ich $f(x,t) =$ an und füge das Minuszeichen ein, worauf ich den kopierten Term einfüge.

Ich muss natürlich die t-Einstellungen angleichen.

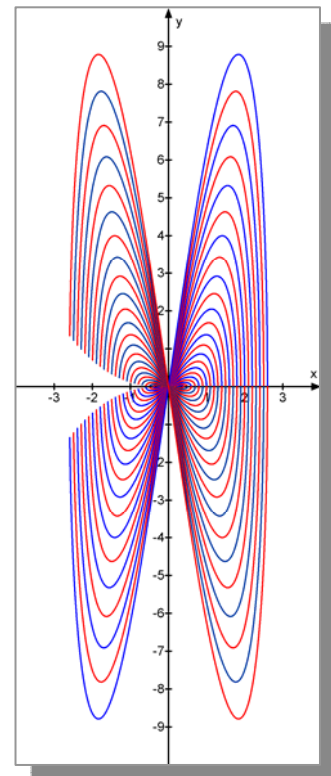
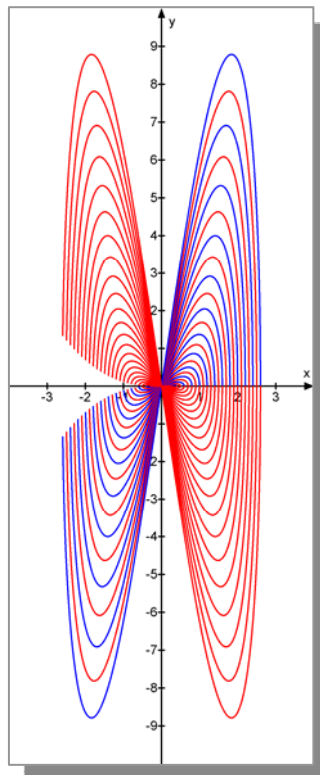
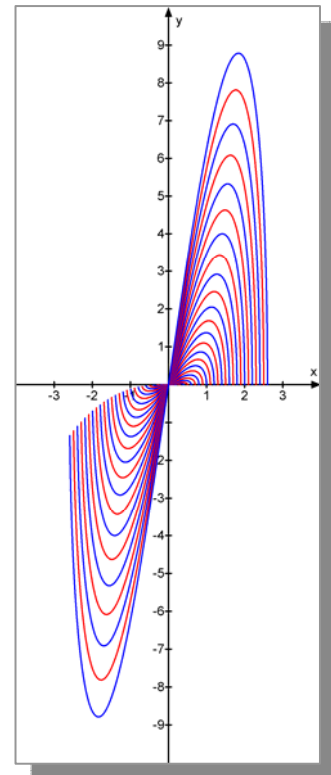
Dann entsteht dieses Bild:

Die Lücke an der negativen x-Achse entsteht durch die natürliche Schrittweite bei der Berechnung der Punkte.
(Ich weiß nur nicht, warum das rechts nicht auch auftritt!).


Wenn Sie auch bei der 2. Schar eine Zusatzfarbe sehen wollen, öffnen Sie das Menü Übersicht. Hinter dem 2. Term sehen Sie zwei Farbkнопfe. Dort können Sie eine zweite Farbe ins Spiel bringen (siehe rechts unten).

Nun spielen wir noch mit dem Trace-Cursor. Wenn im Trace-Fenster für t die Zahl 1 angezeigt wird, bewegen Sie mit der Maus den Trace-Cursor auf der Kurve K_1 . Klicken Sie nun auf den oberen Pfeil bis 1,5 erscheint.

Dann stellen Sie das Trace-Quadrat auf eine deutlich sichtbare Stelle, lassen die Maus vorsichtig los und betätigen auf Ihrer Tastatur die Tasten „auf“ und „ab“. Dann wehen Sie erstens im Trace-Fenster den neuen Parameter, zweitens springt der Trace-Cursor auf die zugehörige Scharkurve.



2.2 Zwei sich schneidende Parabeln – mit einigen Experimenten

Nach einem Reset (Icon  oben links) geben Sie bitte diese Funktionen ein:

1. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + 1$ (Eingabe: $f(x) = x^2/2-9*x/4+1$)
2. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{8}$ (Eingabe: Zuerst mit Strg+F2 die Eingabezeile für die zweite Funktion öffnen, dann $f(x) = -x^2/2+x-3/8$)

Sie erhalten dann dieses Schaubild:

Ihres sieht anders aus?

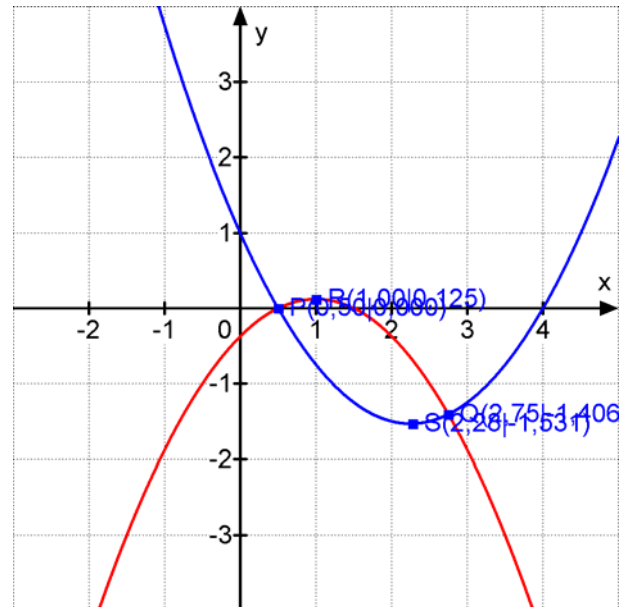
Nun, dann stellen Sie mal die Achsen auf 8 cm ein und verschieben den Ursprung.

Ja und dann habe ich bereits mit MatheGrafix gearbeitet. Sie können dies nachvollziehen.

Aktivieren Sie bitte den Trace-Modus oben rechts.

In der ersten Aufgabe wollen wir die beiden Schnittpunkte bestimmen.

Dazu aktivieren Sie zunächst die erste Parabel, die bei mir blau ist, indem Sie deren Funktionsterm auf der Statuszeile (unten) doppelklicken.




Dann bewegen Sie den quadratischen Trace-Cursor mit dem Mauszeiger entlang der Parabel bis Sie den ersten Schnittpunkt erreicht haben und fixieren ihn mit der rechten Maustaste. Dasselbe dann mit dem zweiten Schnittpunkt. Zur Kontrolle aktivieren Sie nun die Tracefunktion für die zweite Parabel durch einen Klick auf deren Term in der Statuszeile. Nun bewegen Sie bitte den Trace-Cursor entlang der Kurve zu den beiden markierten Schnittpunkten. Sie sollten dann vergleichen, ob die in der Statuszeile nicht fixierten Koordinaten mit den eingetragenen Werten von vorhin übereinstimmen. Wenn ja haben Sie die Schnittpunkt gefunden. Wenn nein, müssen Sie den ungenau gesetzten Punkt löschen. Dies macht man über das Punktmnü (links unten). Sie können dort den gewünschten Punkt löschen, indem Sie das blaue Kreissymbol am rechten Rand anklicken. Dann können Sie das nochmals versuchen und genauer arbeiten.

In der zweiten Aufgabe wollen wir die beiden Parabelscheitel bestimmen. Dazu aktivieren Sie der reihe nach jede Parabel und fotografieren mit der rechten Maustaste den möglichst genau eingestellten Scheitelpunkt. Jetzt sollten Sie meine Abbildung auch erreicht haben.

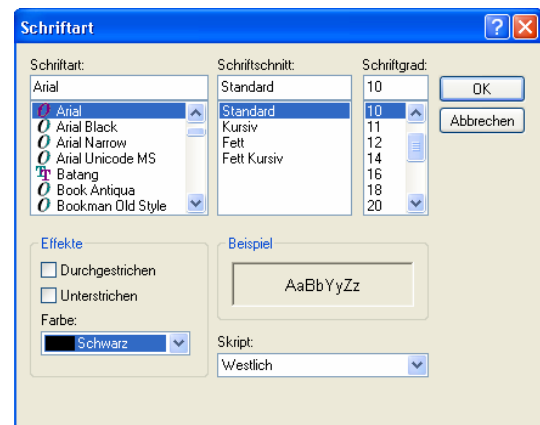
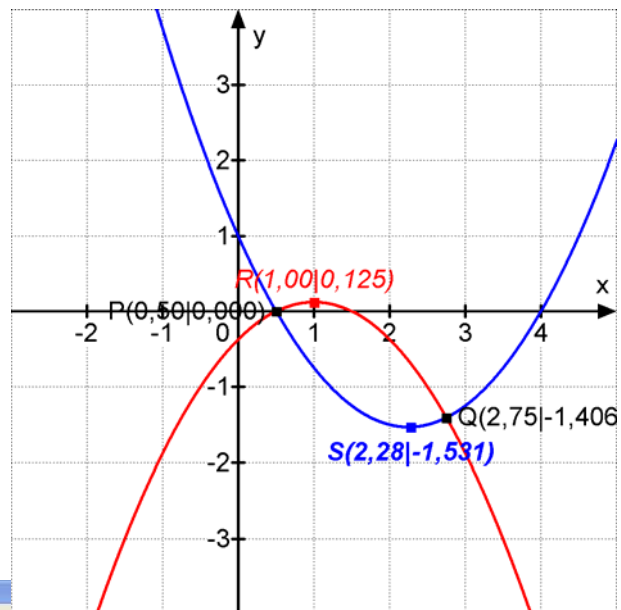
Was jetzt stört ist erstens die Beschriftung und zweitens die Tatsache, dass sich die Einträge überlappen. Nun schauen Sie mal, was ich daraus gemacht habe!

Ich habe dies nur mit dem Punktmenü erreicht. Unten meine Einstellungen zu diesem Schaubild.

Die Beschriftung kann man mit den vier Dreiecken positionieren.

Farbe und Schriftart regelt man nach Klicken auf das Icon,  worauf sich das nebenstehende Fenster öffnet.

Spielen Sie ein wenig damit!



Jetzt kommt eine **neue Aufgabe** dazu:

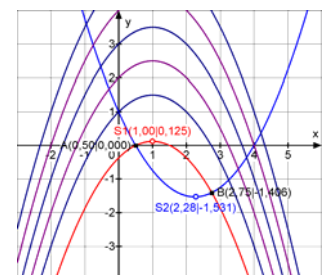
Wir wollen die nach unten geöffnete Parabel so weit nach unten verschieben, dass sich die Kurven berühren.

Dazu trage ich eine Parabelschar ein, die als Absolutglied den Parameter t hat, sonst aber mit der anderen Parabel übereinstimmt:

Strg+F3 dann $f(x,t)$ anklicken und eingeben: $f(x,t) = -\frac{1}{2}x^2 + x + t$

Das sieht dann zunächst so aus:


Die Kurven für $t = 1$ bis 5, Step 1 werden voreingestellt ausgegeben.

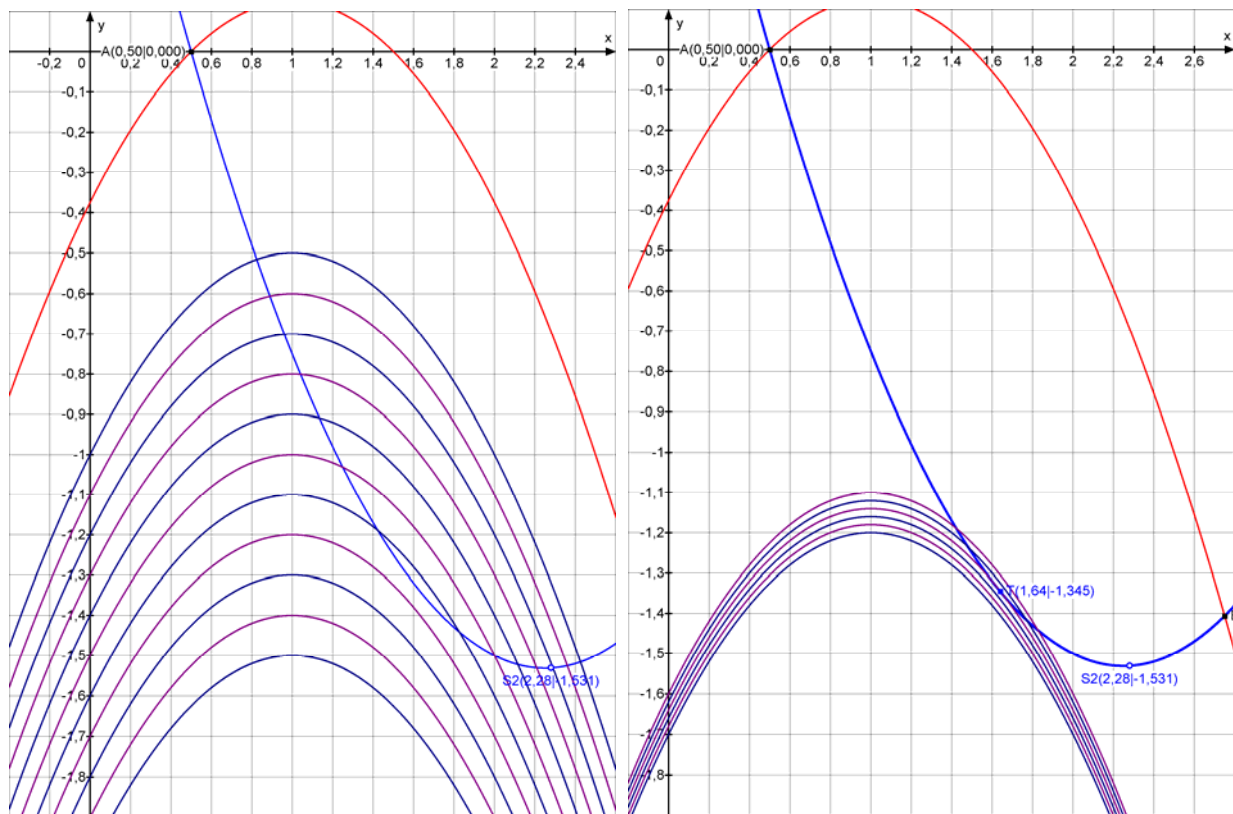
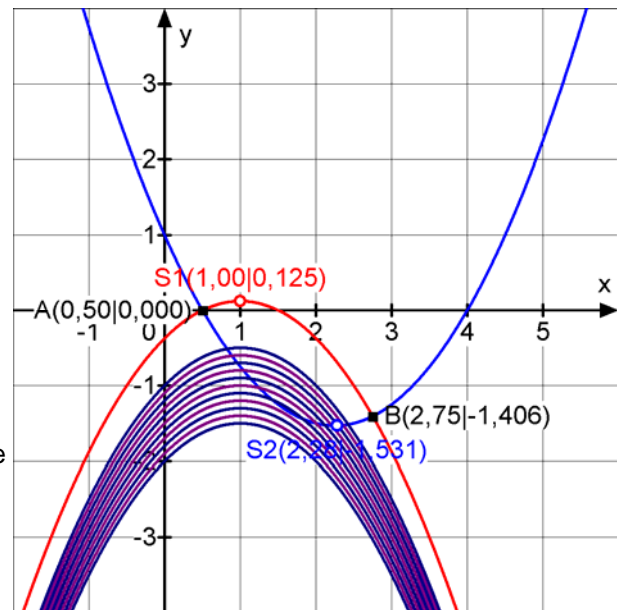


Man erkennt, dass man ganz andere Werte benötigt. Daher teste ich t von -2 bis -1 Step $0,1$

Darauf hin wird dies angezeigt:

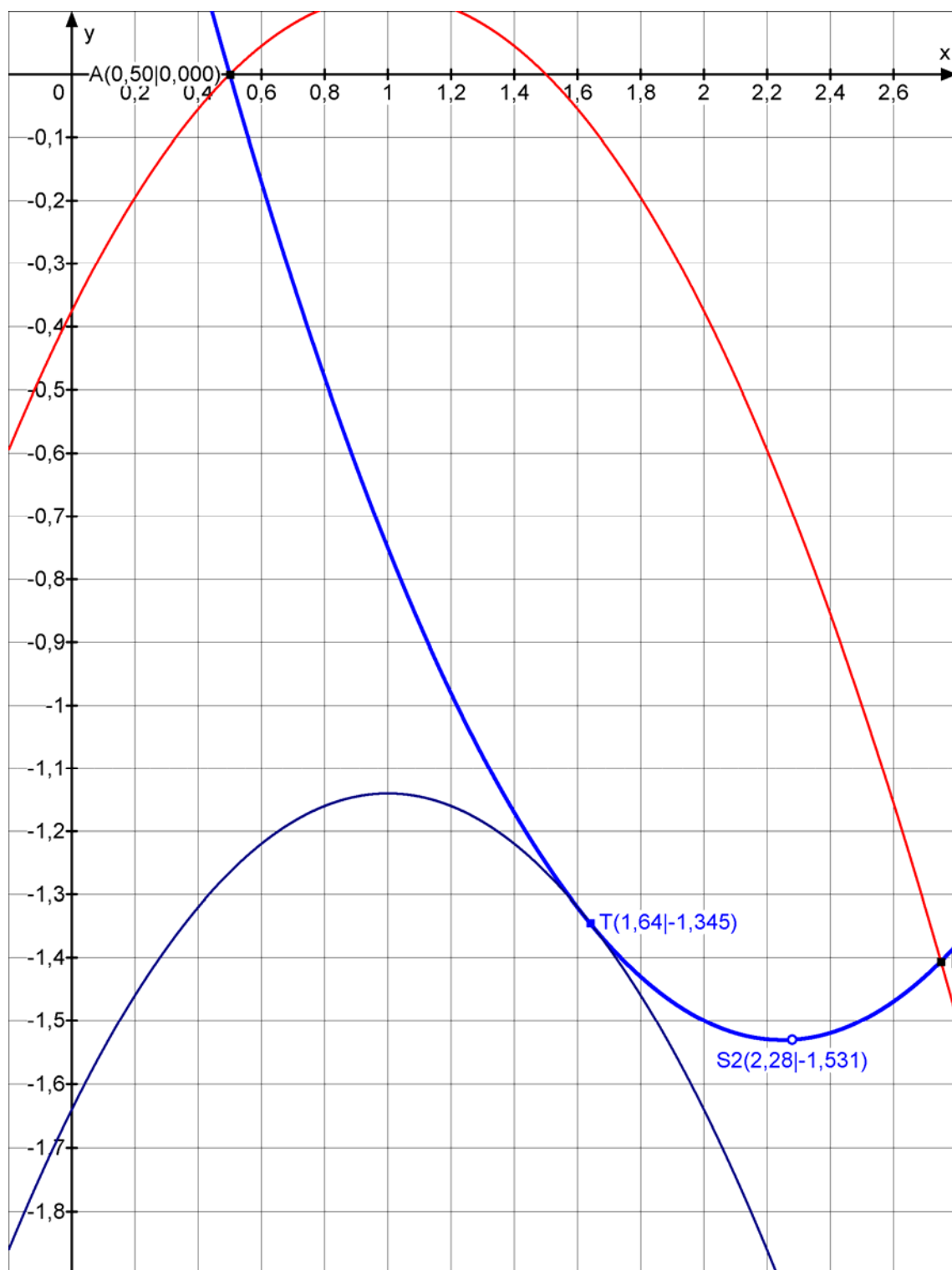
Man könnte vermuten, dass t zwischen $-1,7$ und $-1,6$ liegt. Ich vergrößere dann das Schaubild indem ich andere Maßstäbe verwende.

Durch Klick auf das Feld  (oben ist die x-Achseinstellung) gehe ich für x auf $0,2$ und für y auf $0,1$. Außerdem verlängere ich die x -Achse auf 15 cm und die y -Achse auf 20 cm. Dann sehe ich das untere linke Bild. Für $t = -1,7$ bis $-1,6$ Step $0,2$ erhalte ich das rechte Bild. Ich bin dann mit dem Trace-Cursor auf der blauen Parabel entlanggefahren und habe einen möglichen Berührungspunkt T fixiert.



Daraufhin habe ich den Tracemodus für $t = -1,64$ eingestellt und fahre auf der zugehörigen Parabel nach $x = 1,64$. Dann lese ich in der Statuszeile ab, dass tatsächlich $-1,35$ als y -Koordinate herauskommt. Wir haben also mit großer Genauigkeit die Parabel gefunden, welche die blaue Parabel berührt. Nun lasse ich diese allein anzeigen, indem ich im linken Teil des Fensters t von $-1,64$ bis $-1,64$ einstelle. Das Ergebnis lässt sich sehen! Übrigens kann man das Kurvenfenster vergrößern, womit man eine noch deutlichere Sicht auf die Verhältnisse bekommt.

Dieses Format entspricht der Einstellung in MatheGrafix.



Kurven, die sich berühren, haben eine gemeinsame Tangente. Diese wollen wir als nächstes experimentell bestimmen. Dazu erstelle ich mit der Punktsteigungsform eine Geradengleichung durch den Punkt $T(1,64 | -1,345)$. Die noch unbekannte Steigung wird zum Parameter t :

$$y - y_T = m \cdot (x - x_T)$$

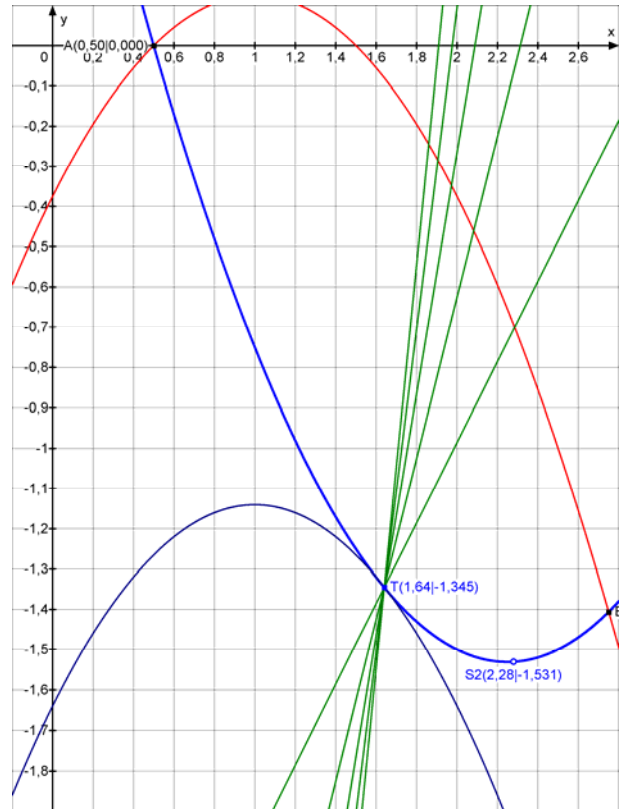
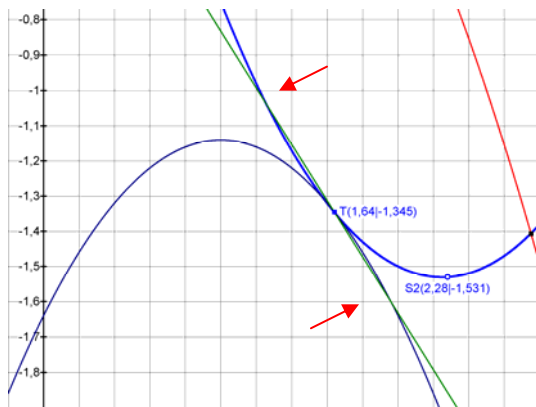
$$y + 1,345 = t \cdot (x - 1,64)$$

$$y = t \cdot (x - 1,64) - 1,345$$

Diese Funktionenschar gebe ich als F4 ein:

Str+F4, dann $f(x,t)$ anklicken und eingeben.

Wir erhalten eine Geradenschar durch T . Eine Tangente ist noch nicht dabei. Die Steigungswerte t stimmen noch nicht! Man kann abschätzen, dass die Steigung und so um -1 liegen sollte. Ich versuche $t = -0,8$ (Eingabe: t von $-0,8$ bis $-0,8$) und erhalte: (Ausschnitt)

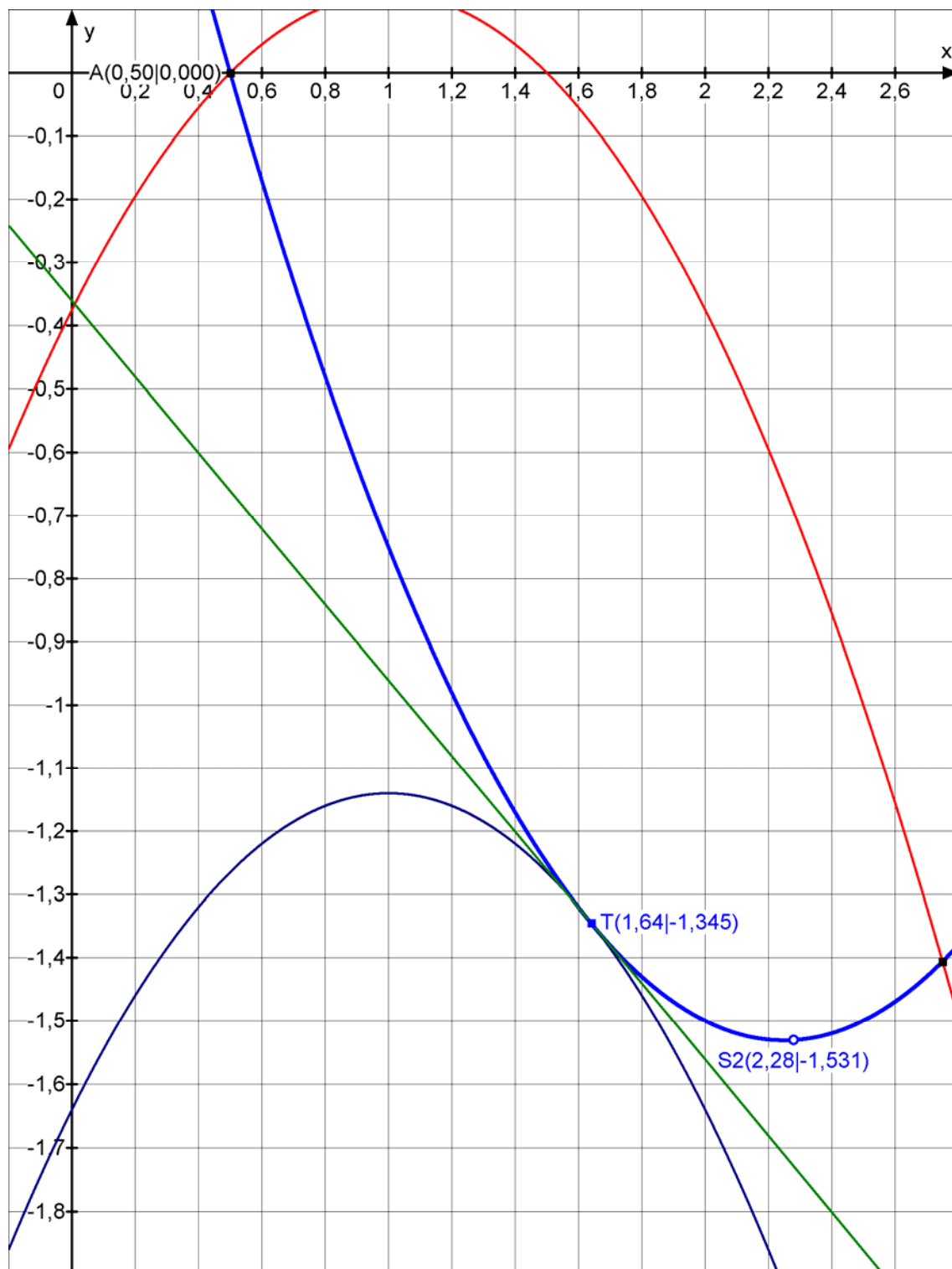


Man erkennt, dass diese Gerade die Parabel dreimal schneidet. Jetzt heißt es weiter testen:

Ich entscheide mich für $t = -0,6$ und bin sehr zufrieden. Die zugehörige Abbildung steht auf der nächsten Seite.

Genauer bekommt man das nicht hin. ABER: Es geht darum, experimentell Lösungen zu finden, die eine gute Näherung darstellen.

Auch hier hilft eine Vergrößerung des Schaubildfensters deutlich weiter!



Zusatz:

Hier die Rechnung dazu:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + 1$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{8}$$

Ableitungen:

$$f_1'(x) = x - \frac{9}{4}$$

$$f_2'(x) = -x + 1$$

Wo sind die Tangenten parallel?

$$f_1'(x) = f_2'(x)$$

$$x - \frac{9}{4} = -x + 1$$

$$2x = \frac{13}{4}$$

$$x = \frac{13}{8} = 1,625$$

(Wir hatten 1,64 ermittelt, also 0,15 mm Abweichung)

y-Koordinate:

$$f_1\left(\frac{13}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{13}{8}\right)^2 - \frac{9}{4} \cdot \frac{13}{8} + 1 \approx -1,336$$

Der Berührungspunkt der nach unten verschobenen 2. Parabel mit der 1. Parabel ist:

$$T(1,625 | -1,336)$$

Gleichung der nach unten verschobenen Parabel:

$$f_t(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + t$$

Setze man T ein, folgt:

$$-1,336 = -\frac{1}{2} \cdot 1,625^2 + 1,625 + t \Rightarrow t \approx -1,64!$$

Nun die gemeinsame Tangente.

Sie hat die Steigung:

$$f_1'\left(\frac{13}{8}\right) = -\frac{5}{8}$$

Punkt-Steigungsform:

$$y + 1,336 = -\frac{5}{8} \cdot (x - 1,625)$$

$$y = -0,625 \cdot (x - 1,625) - 1,336$$

$$y = -0,625 \cdot x - 0,32$$

Für genaue Rechnungen eignet sich ein CAS-Rechner wie TI Nspire:

1.1 BOG AUTO REELL

Define $f1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{4}x + 1$ Fertig

Define $f2(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{8}$ Fertig

solve $\left(\frac{d}{dx}(f1(x)) = \frac{d}{dx}(f2(x)), x\right)$ $x = \frac{13}{8}$

$f1\left(\frac{13}{8}\right)$ $-\frac{171}{128}$

11/11

1.1 BOG AUTO REELL

$f1\left(\frac{13}{8}\right)$ -1.33594

Define $f3(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + t$ Fertig

solve $\left(f3\left(\frac{13}{8}\right) = \frac{171}{128}, t\right)$ $t = \frac{-105}{64}$

solve $\left(f3\left(\frac{13}{8}\right) = \frac{171}{128}, t\right)$ $t = 1.64063$

Define $f11(x) = \frac{d}{dx}(f1(x))$ Fertig

$f11\left(\frac{13}{8}\right)$ $-\frac{5}{8}$

$y = \frac{5}{8} \cdot \left(x - \frac{13}{8}\right) + \frac{171}{128}$ $y = \frac{301}{128} - \frac{5x}{8}$

11/99

Ich denke die Anzeige ist selbst erklärend.

Für eine Darstellung der Schaubilder der Funktionen

$$f_2(x) = x^2, \quad f_4(x) = x^4, \quad f_6(x) = x^6 \quad \text{und} \quad f_8(x) = x^8$$

gibt man die Funktionenschar $f_t(x) = x^t$ ein und lässt t von 2 bis 8 laufen mit Schrittweite (Step) 2.

Ich habe jetzt das Koordinatengitter ausgeblendet.

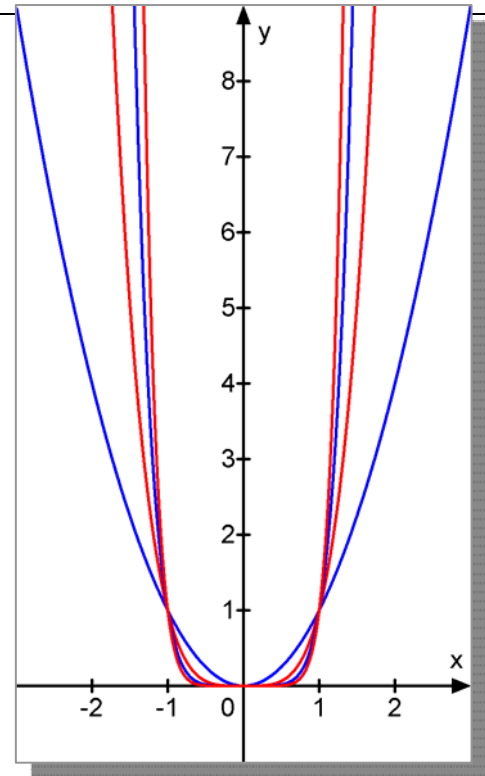
Nun will man ja im Unterricht auch zeigen, dass diese Funktionen nach außen umso steiler verlaufen, je größer der Exponent ist.

Dazu ändere ich die gesamte Einstellung:

t von 2 bis 20, step 2

x-Achse 15 cm lang, Längeneinheit 1

y-Achse 20 cm hoch, 50 Längeneinheiten auf 1 cm



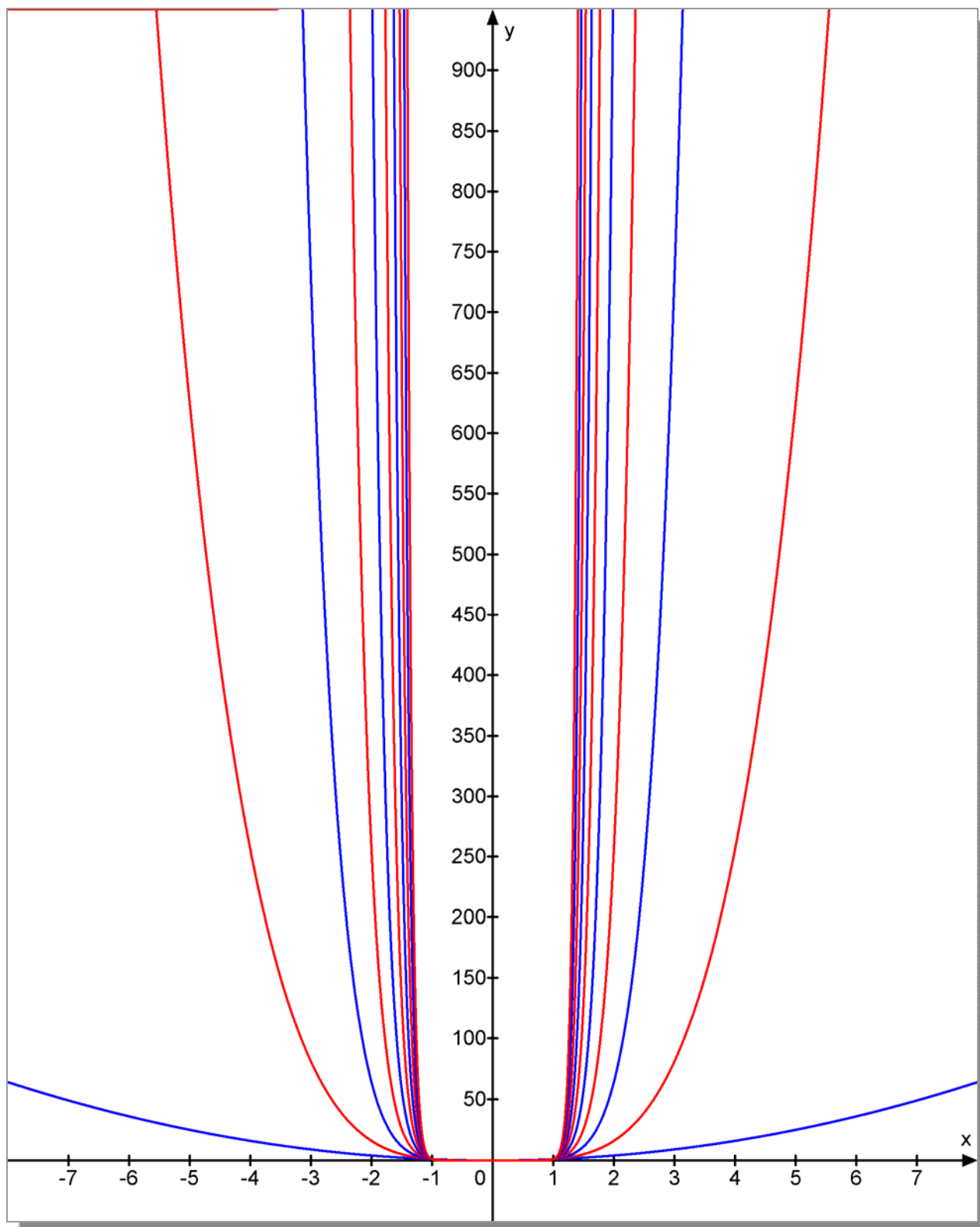
Dann sollte man Schaubild in Originalgröße ausdrucken.

Auf der nächsten Seite kann man es bewundern.

Man kann erkenne, wie extrem flach (bei diesem Maßstab sehr deutlich) diese Kurven in der Umgebung des Ursprungs laufen, und wie steil es außen nach oben geht.

Mit dem Tracecursor kann man dann von den Kurven entlang fahren und sie identifizieren.

Kurvenschar $f_t(x) = x^t$ für $t = 2$ bis 20 , Step 2.



Gegeben sind die Parabel K: $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 4$ und die Gerade g: $y = \frac{3}{2}x - 4$.

- Berechne die Nullstellen der Parabel sowie ihren Scheitel und zeichne sie.
- Berechne die Schnittpunkte S_1 und S_2 von g und K. Wie lang ist die Sehne S_1S_2 ?
- Welche Gleichung hat die zu g parallele Tangente T und welchen Berührungspunkt A hat sie? Zeichne T ein.
- Stelle die Gleichung der Tangenten T_1 in S_1 und T_2 in S_2 auf.
In welchem Punkt Z schneiden sich diese Tangenten? Zeichne sie ein.
- Berechne die Fläche zwischen der Parabel und den Tangenten T_1 und T_2 .

Lösung

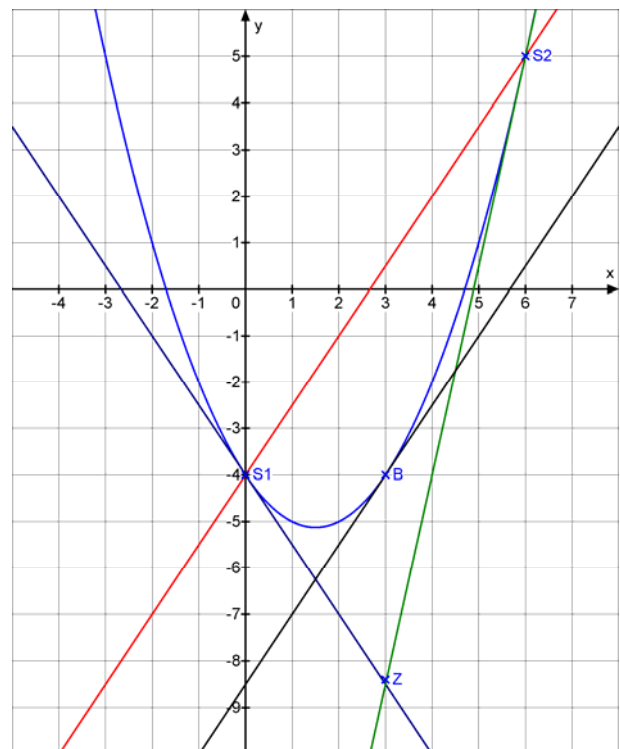
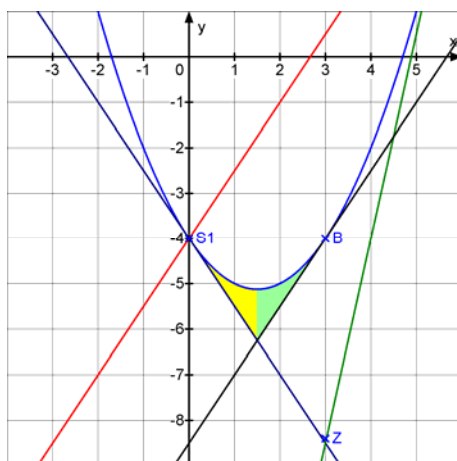
Bis auf den Teil e) wurde diese Aufgabe in der Datei 18030 (Parabeln und Geraden) gelöst.
Ich übernehme von dort die Ergebnisse. (Die Lösung geschieht dort ohne Ableitungen!)

- $N_{1,2}\left(\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{41} \mid 0\right)$ und $S\left(\frac{3}{2} \mid -\frac{41}{8}\right)$
- Schnittpunkte von g und K : $g \cap K = \{S_1; S_2\}$ mit $S_1(0 \mid -4)$, $S_2(6 \mid 5)$
 $S_1S_2 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117}$
- Gleichung der zu g parallelen Tangente: $y = \frac{3}{2}x - \frac{17}{2}$ mit dem Berührungspunkt B(3 | -4).
- Tangente in S_1 : $y = -\frac{3}{2}x - 4$, Tangente in S_2 : $y = \frac{9}{2}x - 22$.
Schnittpunkt dieser Tangenten: $Z(3 \mid -8,5)$.

Dazu erstelle ich mit MatheGrafix dieses Schaubild:

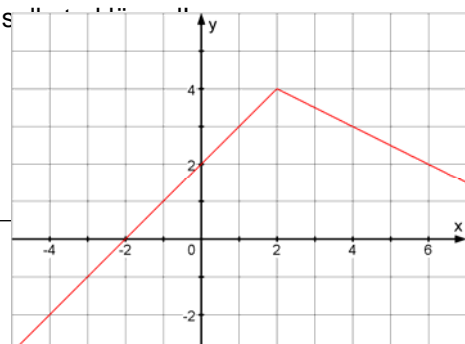
- Die Fläche wird in der Oberstufe mit der Integralrechnung berechnet.

Hier soll nur die Fläche eingefärbt werden.



Dies geschieht im Menü Flächen: Unten Mitte links. Dies ist fast s...

- $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{für } x \leq 2 \\ -\frac{1}{2}x + 5 & \text{für } x > 2 \end{cases}$



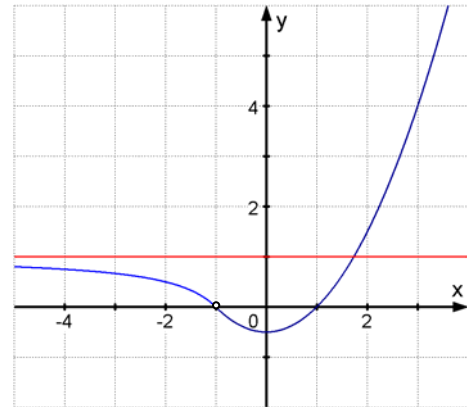
Man definiert die Funktion $f(x) = x + 2$ für
 x von -100 bis 2.

Dann definiert man nach Strg+F2 die zweite
 Funktion $f(x) = -x/2 + 5$ für x von 2 bis ...


Das war's schon!

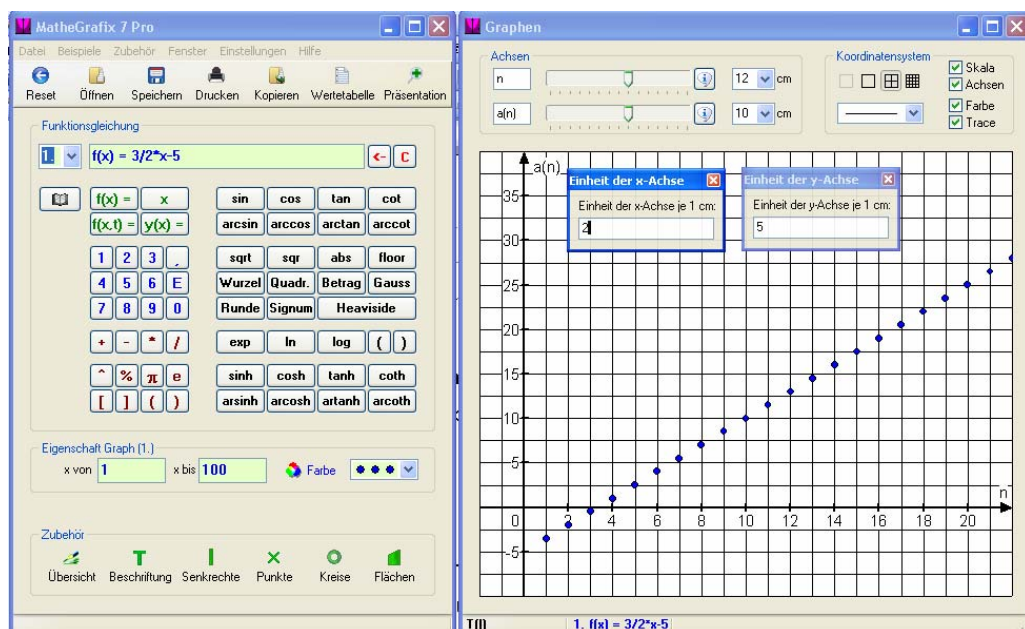
$$b) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Hier wurde als 3. Kurve die waagrechte Asymptote
 $y = 1$ eingegeben, der sich der gebrochen rationale Anteil
 für $x \rightarrow -\infty$ annähert.



$$a) \quad a_n = \frac{3}{2}n - 5$$

Bitte studieren Sie meine Einstellungen, vor allem die Beschriftung der Achsen, die man oben vornimmt, und die Maßstäbe (nach Klick auf das Icon ). Die Punkt-Einstellung erhält man links unten. Und die Folge beginnt bei $n = 1$ (bei MatheGrafix heißt das dann $x = 1$).



Jetzt sollten Sie folgendes testen:

Schalten Sie in den Trace-Modus und öffnen links unten das Punktemenü. Es enthält einen Schieberegler, der das Fortschreiten des Trace-Cursors steuert. Da es bei einer Folge keine Zwischenwerte gibt, stellen Sie ihn bitte auf 1.

Nach dem Schließen dieses Fensters bewegen Sie den Mauszeiger quer über das Koordinatensystem. Sie sollten erkennen, dass der Trace-Cursor von Punkt zu Punkt hüpf. Zugleich können Sie in der Statuszeile die Koordinaten der Punkte, also die Werte der Folge ablesen.

Dies geht aber auch über die mitgelieferte Wertetabelle:

Dazu klickt man in der 2. Menüzeile oben links auf **Wertetabelle**. Diese sieht dann so aus und wird unter die bisherige Arbeitsfläche angehängt.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
y	-5,00	-3,50	-2,00	-0,50	1,00	2,50	4,00	5,50	7,00	8,50	10,00	11,50	13,00	14,50	16,00	17,50	19,00	20,50	22,00	23,50	25,00	26,50	28,00	29,50	31,00

In der Regel sieht sie zuerst anders aus. Mit dem Schieberegler kann man den Abstand der x-Werte einstellen, hier auf 1, und durch Anklicken einer Zahl erreichen Sie, dass dort (oder daneben) die Null erscheint. Wie man sieht kann man diese Wertetabelle dann drucken, kopieren oder in Excel oder Word übernehmen und dort weiter bearbeiten!

Das entsteht dann in Word auf einer neuen Seite:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	
x					1,	2,	4,	5,	7,	8,	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	4
y	5,	3,	2,	0,	0	5	0	5	0	5	0,	1,	3,	4,	6,	7,	9,	0,	2,	3,	5,	6,	8,	9,	1,
	0	5	0	5	0	0	0	0	0	0	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5	0
	0	0	0	0							0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Wenn man dies bearbeitet, erhält man beispielsweise:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
y	-3,50	-2,00	-0,50	1,00	2,50	4,00	5,50	7,00	8,50	10,00	11,50	13,00	14,50
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
16,00	17,50	19,00	20,50	22,00	23,50	25,00	26,50	28,00	29,50	31,00			


Ich habe die Tabelle zerteilt, die Spaltenbreite (rechte Maustaste) auf 1,2 cm vergrößert und die Schrift verkleinert.

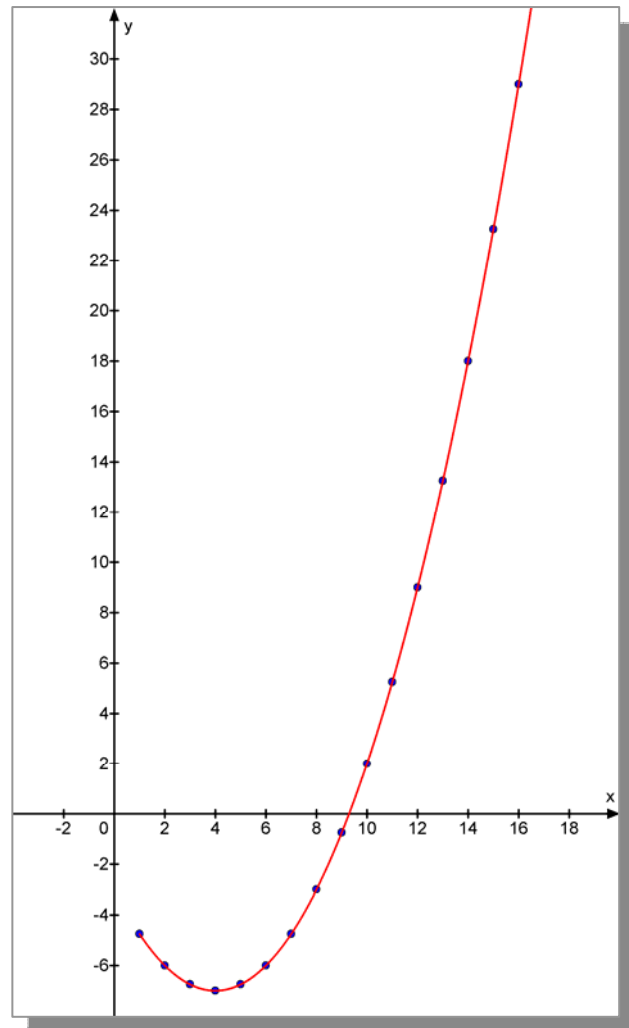
b) $a_n = \frac{1}{4}n^2 - 2n - 3$

Diese quadratische Folge hat eine Punkteschaubild, das auf einer Parabel liegt.

Man kann beides zugleich darstellen. Zuerst gibt man den Funktionsterm als $f(x) = x^2/4 - 2x - 3$ ein und lässt Punkte statt Linien ausgeben. Dann kopiert man den Funktionsterm, öffnet mit Strg+F2 das Eingabefeld für die zweite Funktion und kopiert denselben Funktionsterm dort hinein. Jetzt lässt man dann die Parabel zeichnen.

Ein Wort zur Farbeinstellung.

Rufen Sie jetzt bitte einmal die Übersicht über die eingegebenen Funktionen auf. Sie erreichen das Fenster entweder mit Strg+T oder über das Icon  in der Zeile Zubehör.



Dort können Sie die Farbeinstellungen und anderes sehen und ändern.

Ich habe für mich entschieden, dass ich die „Hauptkurve“ stets in „blau“ haben möchte, die dann folgende Farbe soll rot sein. Damit diese Farben beim Neustart von Mathegrafix wieder so vorhanden sind, können Sie diesen Status als Voreinstellung abspeichern:

Menü (Einstellungen) – Start – eigene Funktionen und Farben verwenden – aktuelle Einstellungen als Vorlage speichern – speichern.

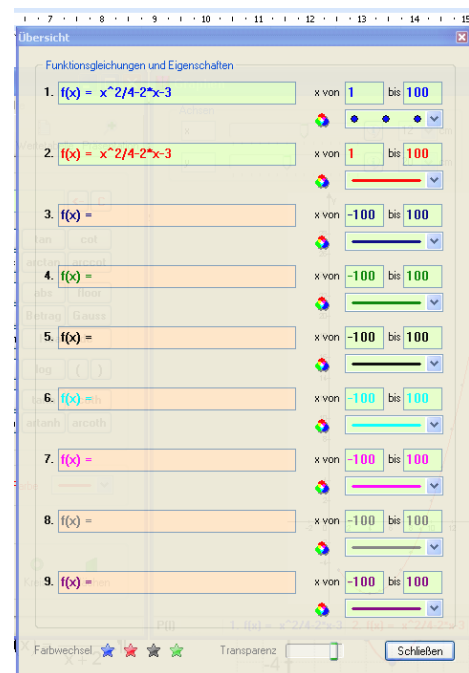
c) $a(n) = (1 + \frac{1}{n})^n$

ist eine konvergente Folge mit dem Grenzwert $e \approx 2,718$.

Diese Folge ist als Beispiel einprogrammiert, Rufen Sie es bitte aus:

Menü (Beispiele) – Zahlenfolgen – Konvergente Zahlenfolge.

Studieren Sie dort, wie die Einstellungen und die Textbeschriftung vorgenommen worden ist.

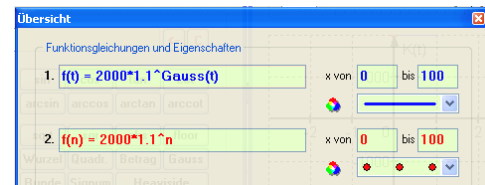


Ein Darlehen von 2000 € wird jährlich mit 10% verzinst. Die Kontostandsfunktion lautet dann: $K(t) = K(0) \cdot q^t$. q ist der Zinsfaktor: $q = 1 + p = 1 + 0,1 = 1,1$.

Daher lautet die Formel: $K(t) = 2000 \cdot 1,1^t$

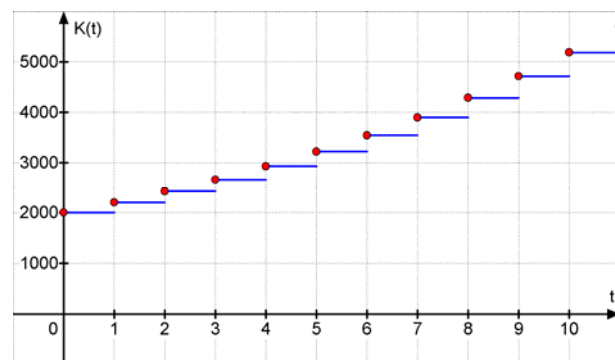
Ich gebe diese Funktion zweimal ein. Das erste Mal schreibe ich statt x einfach Gauss(x). Dazu gibt es ein vorgefertigtes Icon. Übrigens schreibe ich die Funktion komplett mit der Variablen t und ändere auch die Achsenbezeichnung in t um.

Dann verwende ich diese Funktion ein zweites Mal als Zahlenfolge. In der Übersicht sieht das dann so aus:



Und dies ist mein Schaubild.

Erklärung: Wegen der jährlichen Verzinsung bleibt der Kontostand während des ganzen Jahres konstant. Der Anfangswert gehört dazu (also der linke Endpunkt), der Endwert nicht mehr (rechter Endpunkt), denn dort springt der Kontostand auf Grund der nächsten Verzinsung auf das nächste Niveau.



Mehr solche Beispiele gibt es in 18250 Finanzmathematik!

Nun rufen wir noch die Wertetafel mit Strg+T auf:

x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11
y	1818	1818	2000	2000	2200	2200	2420	2420	2662	2662	2928	2928	3221	3221	3543	3543	3897	3897	4287	4287	4716	4716	5187	5187	5706

Funktionsrechner: x-Wert 5, Ergebnis 3221,02

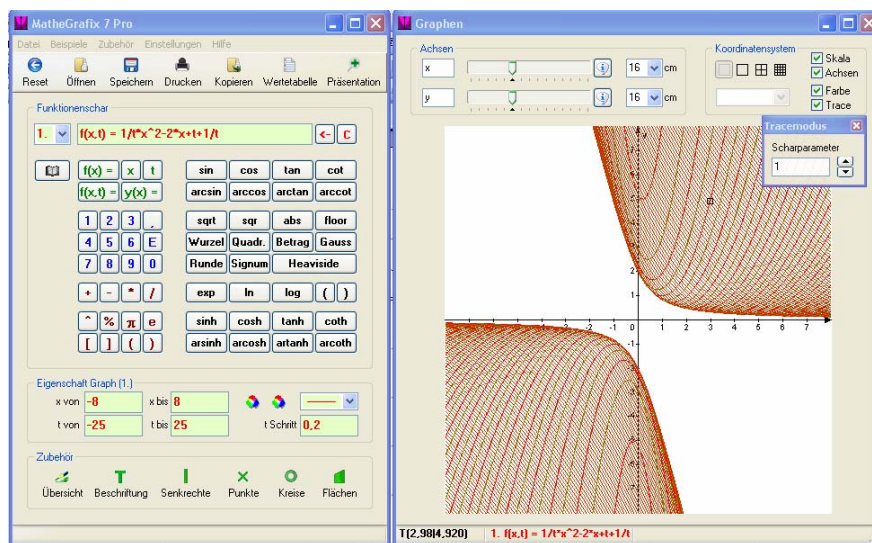
Diese Wertetafel enthält auch Halbjahresschritte.

Mit dem Funktionsrechner hat man also auch noch einen Taschenrechnerersatz zu Hand!

Ich habe $x = 5$ eingegeben und erhalte das Ergebnis $K(t) = 3221,02$ (€).

a) **Einprogrammierte Musterbeispiele** finden Sie unter Beispiele.

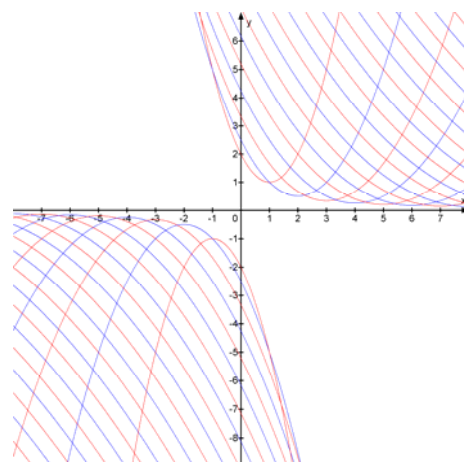
Starten Sie doch einmal die erste Parabelschar, die meiner Datei 42064 entnommen ist.



Ich zeige Ihnen, was Sie mit diesem Bild anstellen können. Zunächst einmal klicken Sie im Tracemodus-Fenster auf den oberen Pfeil, worauf der nächste größere Wert 1,2 erscheint. Das ist die Folge der Voreinstellung links, wo Schrittweite 0,2 eingestellt ist. Dann bewegen Sie den Mauszeiger so, dass Sie den quadratischen Trace-Cursor sehen, lassen vorsichtig die Maus los und betätigen auf Ihrer Tastatur die Taste Pfeil-oben. Daraufhin erhöht sich mit jedem Klick der t-Wert um eine Schrittweite, was zur Folge hat, dass der Trace-Cursor bei gleichem x-Wert (also auf einer vertikalen Geraden) auf die nächste Kurve springt, was in diesem Fall nach unten geht. Das setzen Sie eine Zeit lang fort, bis Sie erkennen, dass irgendein t-Wert den kleinsten y-Wert an dieser Stelle erreicht (Sie können dies in der Statuszeile genau ablesen!). Ab da geht es wieder nach oben. So kann man ein Gefühl für diese Kurvenschar bekommen.

Nun ändern Sie einmal die Schrittweite für t und geben 1 statt 0,2 ein. Schon ändert sich die Abbildung.

Außerdem habe ich die Farbeinstellung geändert. In der Zeile Eigenschaften Graph sind zwei Icons für die erste und die zweite Farbe.



b) Nun testen Sie noch eine neue Kurvenschar.

Geben Sie bitte diese Gleichung ein: $f_t(x) = \frac{t^2 x^3 - 8}{4tx}$

Wenn Sie kein Schaubild sehen, dann haben Sie vielleicht vergessen, auf $f(x,t)$ umzuschalten oder einen Syntaxfehler begangen.

Der erste Eindruck ist unschön.

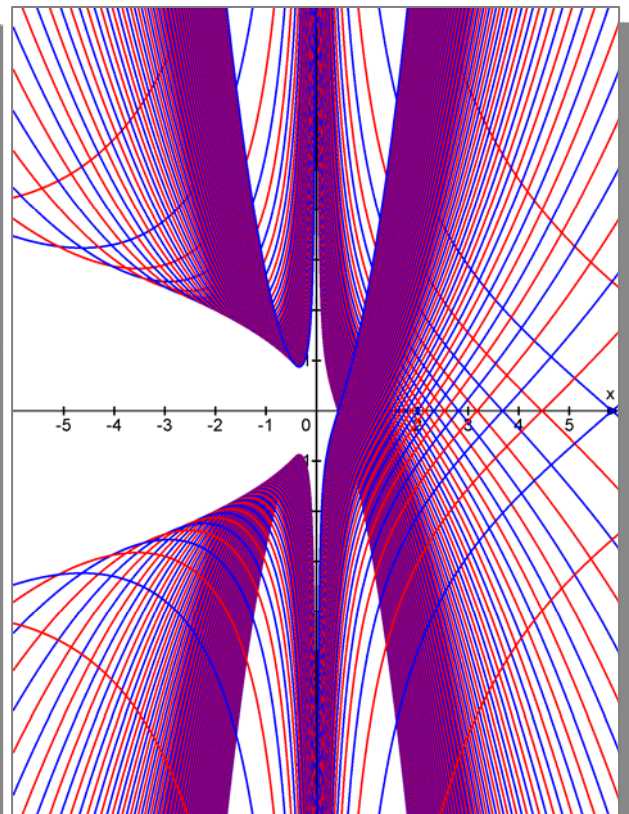
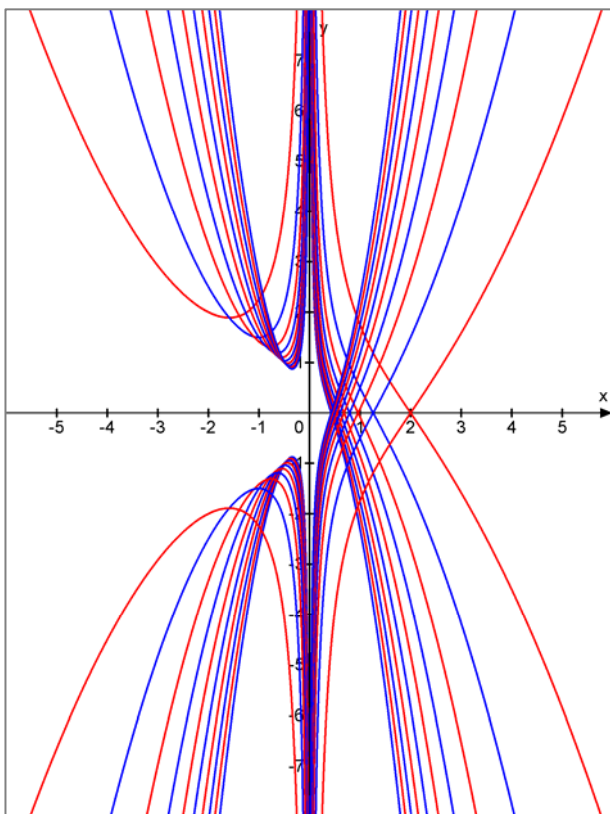
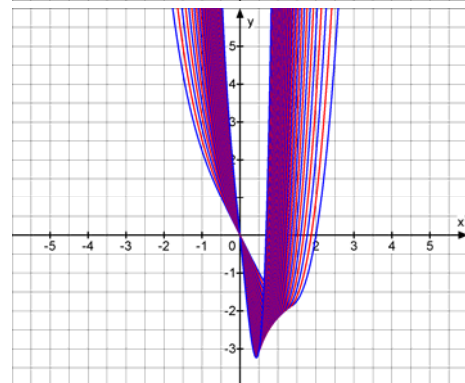
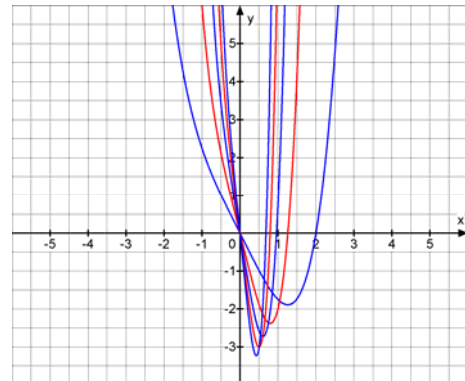
Also ändern wir die Einstellungen.

Beginnen wir mit einer Schrittweite von 0,1:

Sieht schon spannender aus!

Nun nehmen wir negative Werte dazu:

t von -10 bis 10, bleiben links bei Step 1 und rechts bei Step 0,1. Dazu ändern wir die Achsengröße auf 12 bzw. 16 cm in beiden Richtungen. Ich blende das Koordinatengitter aus. Ist das nicht aufregend?



Bei der Eingabe des Funktionsterms kann ein schlimmer Fehler passieren. (Mir ging es eben auch so, wodurch ich zufälligerweise auf eine verblüffende Schar gestoßen bin.)

Den Term der Funktion $f_t(x) = \frac{t^2 x^3 - 8}{4tx}$

Müssen Sie entweder so eingeben: $f(x,t) = (t^2 x^3 - 8)/(4 * t * x)$

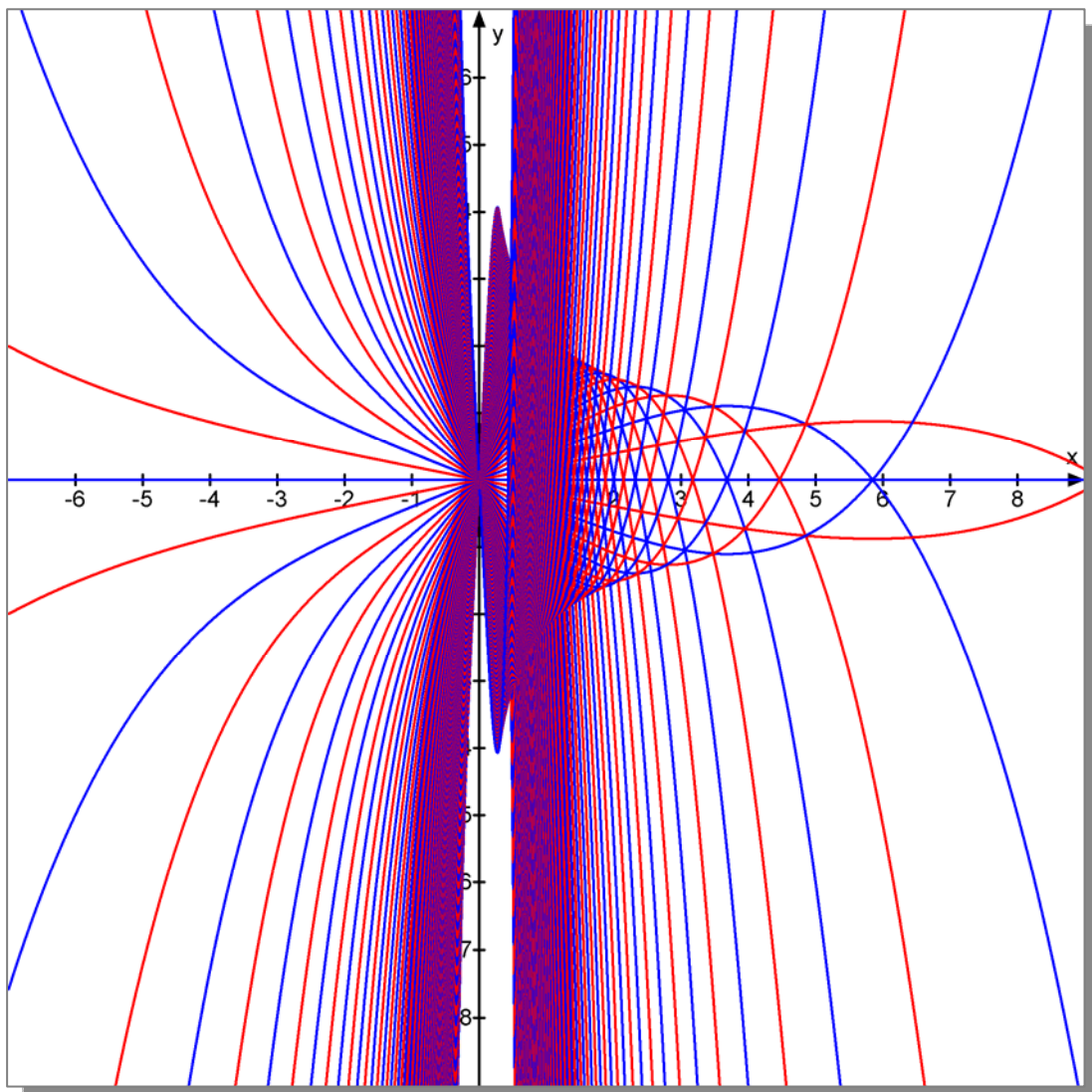
oder so: $f(x,t) = (t^2 * x^3 - 8)/4/t/x$

Aber keinesfalls so: $f(x,t) = (t^2 * x^3 - 8)/4 * t * x$

Jeder Faktor im Nenner bedeutet eine Division, und das wird in den Eingabezeilen 1 und 2 auch realisiert. In der 3. Eingabezeile werden jedoch t und x wieder multipliziert und stehen dadurch wieder im Zähler:

$$f_t(x) = \frac{t^2 x^3 - 8}{4} \cdot t \cdot x$$

Also haben wir jetzt: $f_t(x) = \frac{1}{4}(t^3 x^4 - 8tx)$ oder $f_t(x) = \frac{1}{4}t^3 x^4 - 2tx$ und deren Schaubild sieht aufregend aus. Versuchen Sie diese Darstellung nachzugestalten!




Hier sollten Sie noch einmal mit dem Tracemodus spielen und die Schar erkunden:

Stellen Sie den Parameter im Tracemodus-Fenster auf 1,1 und bewegen dann den Mauszeiger vorsichtig über das Bild. Wenn Sie den Trace-Cursor rechts oben sehen, lassen Sie die Maus los und betätigen auf der Tastatur den Schalter Pfeil auf/ab. Der Cursor springt dann von Kurve zu Kurve entlang einer vertikalen Geraden. Sie beobachten dann, wie diese seltsam verschlungene Figur Mitte rechts entsteht. Der Cursor geht herunter, wieder hinauf und dann endgültig nach unten.

Zugleich erkennen Sie, welcher Scharparameter zur welcher Kurve gehört.

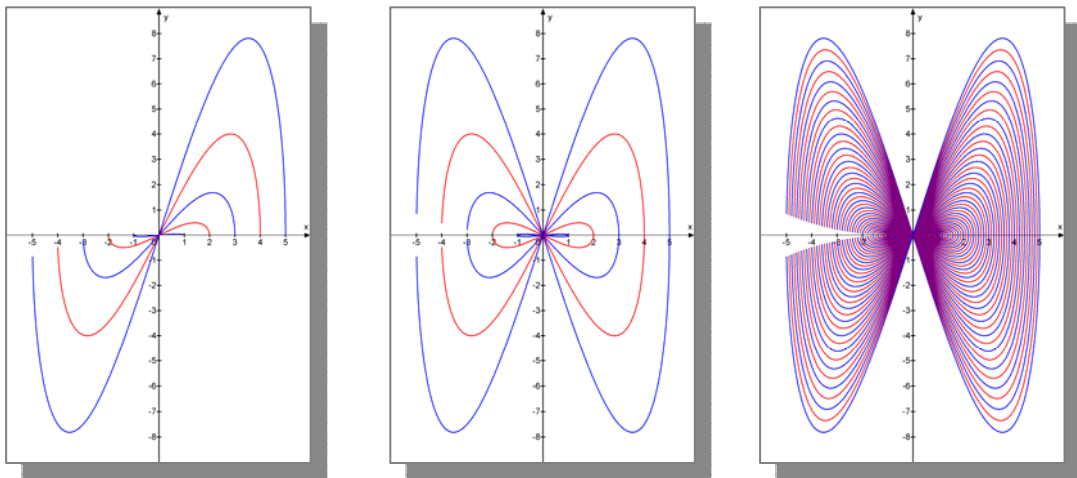
Da Ganze wird noch effektvoller, wenn Sie das Schaubild ganz stark vergrößern (an der Ecke rechts unten „anfassen“).

c)
$$g_k(x) = \frac{k}{8} \cdot x \cdot \sqrt{k^2 - x^2}$$

Löschen Sie die Eingabezeile der Funktion ganz mit dem Icon . Dann geben Sie ein:

$$g(x,k)=k/8*x*sqrt(k^2-x^2).$$

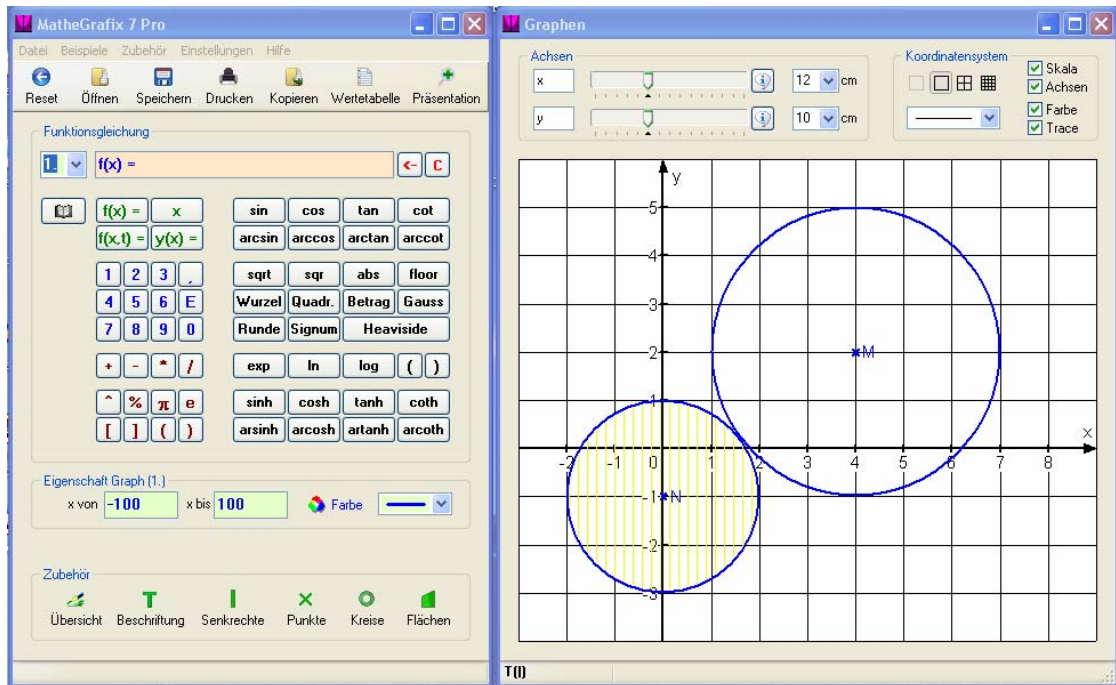
Das Programm akzeptiert diese Eingabe und stellt zunächst dies dar (ich habe die y-Achse auf 18 cm ausgedehnt. Jetzt lasse ich auch negative k-Werte zu und gebe ein t von -5 bis 5, Schritt: 1 und anschließend Schritt 0,1. Diese Bilder ergeben sich dazu.



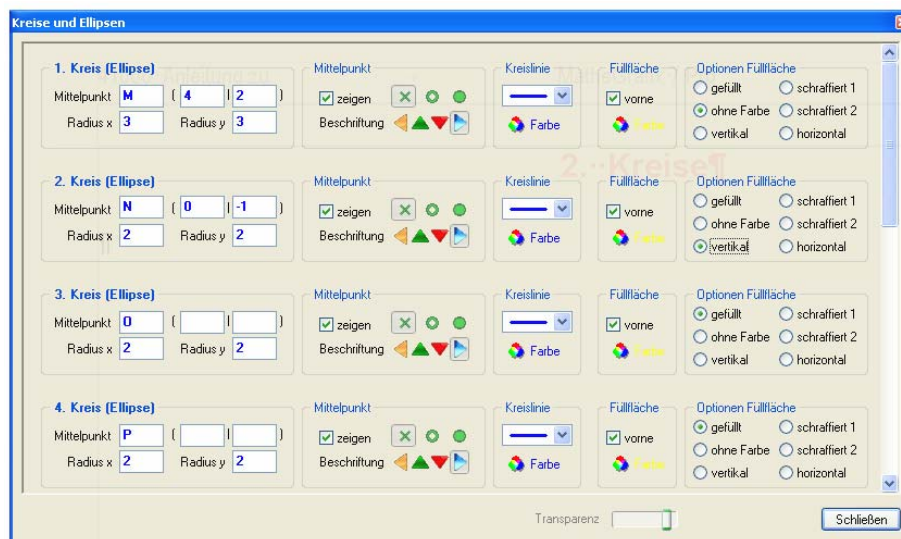
Die Lücke links entsteht oft bei Wurzelfunktionen, weil diese auch einmal senkrecht auf die x-Achse zu laufen können. Und weil es bei der Berechnung der dargestellten Funktionswerte eine kleinste Einheit gibt, passiert es, dass man eben nicht ganz bis an die x-Achse heran kommt.

2. Kreise

MatheGrafix kann auch schon Kreise einzeichnen. Dazu klicken Sie bitte auf „Kreise“ im Menü Zubehör.



Dann öffnet sich dieses Fenster:



Sie erkennen, dass ich für zwei Kreise die Mittelpunkte eingegeben habe und auch den Radius. Der erste Kreis ist ohne Farbe, der zweite mit vertikaler Schraffur. Hier sollten Sie einfach spielen und testen, was da alles geht. Wenn Sie für x einen anderen Radius eingeben als für y, erhalten Sie eine Ellipse!

Und wenn Sie das Koordinatensystem ganz ausblenden, dann können Sie geometrische Darstellungen ohne Achsen erstellen.

Wird fortgesetzt